Szkice rozwiązań zadań z arkuszy maturalnych zamieszczonych w 47. numerze „Świata Matematyki", który można nabyć w sklepie na www.swiatmatematyki.pl

Zestaw podstawowy

Zadania zamknięte

1. Wypiszmy początkowe potęgi liczby 2

$$2^1 = 2; \quad 2^2 = 4; \quad 2^3 = 8; \quad 2^4 = 16; \quad 2^5 = 32$$

Od tej pory , końcowe cyfry będą się powtarzały. $99:4 = 24\, reszty\ 3$. Ponieważ $2^3 = 8$, ostatnią cyfrą 2^{99} jest cyfra 8. Odpowiedź **D**

2. Sprawdzamy kolejno

A. $\mathbf{2^2 - 1 = 4 - 1 = 3}$ **-** liczba pierwsza

B. $\mathbf{2^5 - 1 = 32 - 1 = 31}$ **-** liczba pierwsza

C. $\mathbf{2^7 - 1 = 128 - 1 = 127}$ **-** liczba pierwsza

Pozostaje tylko odpowiedź **D**

3. Ponieważ $a \cdot b = NWD(a,b) \cdot NWW(a,b) = 2 \cdot 12 = 24$, to odpowiedź **A.**

4. $\mathbf{10^{2018} = 1\underbrace{000\ldots000}_{2018\ zer}}$

$$\mathbf{1\underbrace{000\ldots000}_{2018\ zer} = \underbrace{999\ldots999}_{2014\ dziewiątek}\ 0000 + 10000}$$

$$\mathbf{10^{2018} - 2018 = \underbrace{999\ldots999}_{2014\ dziewiątek}\ 0000 + 10000 - 2018 = \underbrace{999\ldots999}_{2014\ dziewiątek}\ 0000 + 7982}$$

$$\mathbf{= \underbrace{999\ldots999}_{2014\ dziewiątek}\ 7982}$$

Przystępujemy do policzenia sumy cyfr $9 \cdot 2015 + 7 + 8 + 2 = 18135 + 17 = 18152$. Odpowiedź **C.**

5. $\mathbf{11\frac{1}{9}\%\ liczby\ 18 = \frac{18 \cdot 11\frac{1}{9}}{100} = \frac{18 \cdot \frac{100}{9}}{100} = 2}$ Odpowiedź **B.**

6. Niech towar kosztuje a zł. Po pierwszej podwyżce będzie kosztować $a + 0{,}1a = 1{,}1a$ $zł$.

Po drugiej podwyżce $1{,}1a + 0{,}1 \cdot 1{,}1a = 1{,}1a + 0{,}11a = 1{,}21a$

Po trzeciej podwyżce $1{,}21a + 0{,}1 \cdot 1{,}21a = 1{,}21a + 0{,}121a = 1{,}331a$

Ostatecznie towar podrożał o $1{,}331a - a = 0{,}331a$

$$\frac{0{,}331a}{a} \cdot 100\% = 33{,}1\%$$

Odpowiedź **C.**

7. $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$ $\boldsymbol{to}$ $\boldsymbol{f(2) = \frac{1}{2}}$

$$f(f(2)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Odpowiedź **B.**

8. Zastosujmy podstawienie: $y = \frac{x}{x-1}$. Wówczas $f(f(x)) = f(y) = \frac{y}{y-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-(x-1)}{x-1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x-1}{1} = x$ Odpowiedź **C**

9. Sprawdzamy kolejno:

A. $\boldsymbol{f(x) = x + 2 \quad to \ 1 + 2 = 3}$ źle

B. $\boldsymbol{f(x) = -3x + 2 \quad to \quad -3 \cdot 1 + 2 = -3 + 2 = -1 \quad i \quad -3 \cdot 2 + 2 = -6 + 2 = -4}$ źle

C. $\boldsymbol{f(x) = -4x + 3 \quad to \quad -4 \cdot 1 + 3 = -4 + 3 = -1 \quad i \quad -4 \cdot 2 + 3 = -8 + 3 = -5}$ **źle**

D. $\boldsymbol{f(x) = -2x + 1 \quad to \quad -2 \cdot 1 + 1 = -2 + 1 = -1 \quad i \quad -2 \cdot 2 + 1 = -4 + 1 = -3}$
Odpowiedź **D.**

10. $\boldsymbol{f(x) = x^2 - x - 2,\ to\ \ f(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0}$; $\boldsymbol{f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 2 = 4 + 2 - 2 = 4,\ \ f(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0}$ Odpowiedź **C.**

11. Największą wartością funkcji $g(x) = -x^2$ jest 0, a funkcja $f(x) = g(x) + 1$, czyli największa wartość funkcji $f(x)$ wynosi 1. Odpowiedź **A.**

12. $\boldsymbol{W(x) = x^3 - ax + 2,\ to\ \ W(2) = 2^3 - 2a + 2 = 8 - 2a + 2 = 10 - 2a}$

$$W(2) = 10,\ \ to\ \ 10 - 2a = 10,\ \ to\ \ 2a = 0,\ \ to\ \ a = 0$$

Odpowiedź **D.**

13. $\boldsymbol{x^4+1=2x^2,\ \ to\ \ x^4-2x^2+1=0,\ \ to\ \ (x^2-1)^2=0,\ \ to\ \ x^2-1=0,\ \ to\ \ (x-1)(x+1)=0}$ To równanie ma 2 rozwiązania. Odpowiedź **B.**

14. Wielomian $W(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n$ jest równy sumie swoich współczynników dla $x=1$. $W(1)=(2x-1)^{100}=(2\cdot 1-1)^{100}=(2-1)^{100}=1^{100}=1$ Odpowiedź **B.**

15. Największa wartość funkcji $g(x)=-(2-x)^{100}$ wynosi 0. Ponieważ $f(x)=g(x)+2$, to najwyższa wartość funkcji $f(x)$ wynosi 2. Odpowiedź **C.**

16. $\boldsymbol{\sin x+\cos x=\frac{4}{3};\ \ to\ \ (\sin x+\cos x)^2=\frac{16}{9};\ \ to\ \ \sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{16}{9};\ \ ale\ \ \sin^2 x+\cos^2 x=1;\ \ więc\ \ 2\sin x\cos x=\frac{7}{9};\ \ to\ \ \sin x\cos x=\frac{7}{18}}$ Odpowiedź **B.**

17.$\boldsymbol{\sin\alpha+\cos\alpha}$ ma największą wartość, gdy $\sin\alpha=\cos\alpha$. A to zachodzi, gdy $\alpha=45^{\circ}$. Ponieważ $\sin\alpha=\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \ więc\ \ \boldsymbol{\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}}$**.** Odpowiedź **B.**

18. Prosta $y=x+2$ z osią ox tworzy kąt 45°, bo $\tan 45^{\circ}=1$. Prosta $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$ z osią ox tworzy kąt 60°, bo $\tan 60^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. W takim razie, te proste między sobą tworzą kąt $60^{\circ}-45^{\circ}=15^{\circ}$. Odpowiedź **A.**

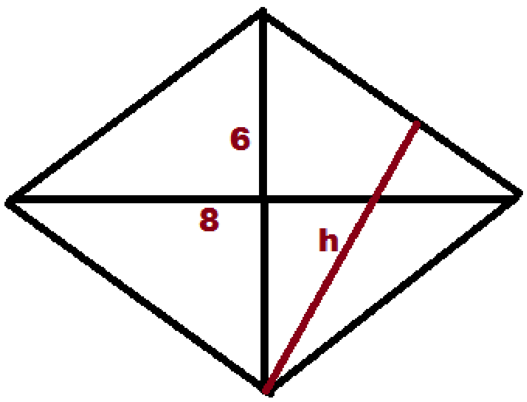
19. $\boldsymbol{4^x=8;\ \ to\ \ 4^x=2^3;\ \ to\ \ (2^2)^x=2^3;\ \ to\ \ 2^{2x}=2^3;\ \ to\ \ 2x=3;\ \ to\ \ x=\frac{3}{2}.}$ Odpowiedź **B.**

20. $\boldsymbol{\left(\frac{1}{4}\right)^x=\sqrt{2};\ \ to\ \ 4^{-x}=2^{\frac{1}{2}};\ \ to\ \ (2^2)^{-x}=2^{\frac{1}{2}};\ \ to\ \ 2^{-2x}=2^{\frac{1}{2}};\ \ to\ \ -2x=\frac{1}{2};\ \ to\ \ x=-\frac{1}{4}.}$ Odpowiedź **A.**

21. $\boldsymbol{\log y=1;\ \ to\ \ y=10;\ \ ale\ \ y=\log x;\ \ to\ \ \log x=10;\ \ to\ \ x=10^{10}.}$ Odpowiedź **B.**

22. Jeżeli półkole ma pole 2π, to całe koło ma pole 4π. W takim razie promień tego koła r=2. Obwód całego koła wynosi wtedy 4π. Pół obwodu, to 2π. Dodać jeszcze średnicę równą 4. Ostatecznie obwód półkola wyniesie 2π+4. Odpowiedź **D.**

23.



a – bok rombu

$$3^2 + 4^2 = a^2$$

$$9 + 16 = a^2$$

$$a^2 = 25$$

$$a = 5$$

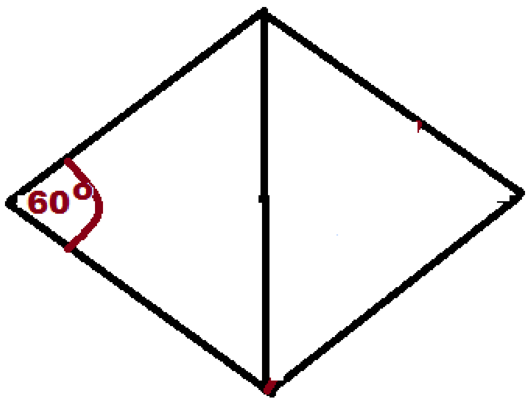
$$P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$P = 5h$$

$$h = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$$

Odpowiedź **C.**

24.



Jak widać z rysunku pole całego rombu powstało z dwóch trójkątów równobocznych. Każdy o polu $\sqrt{3}$

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}; \quad to \quad \frac{a^2}{4} = 1; \quad a^2 = 4; \quad a = 2$ Odpowiedź **B.**

25. Wybieramy najbardziej ogólną odpowiedź, czyli odpowiedź **A.**

Zadania otwarte

26.

$$|x^2 - 2| = 2$$

To

$$x^2 - 2 = 2 \quad lub \quad x^2 - 2 = -2$$

$$x^2 - 4 = 0 \quad lub \quad x^2 = 0$$

$$(x-2)(x+2) = 0 \quad lub \quad x = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad lub \quad x + 2 = 0 \quad lub \quad x = 0$$

$$x = 2 \quad lub \quad x = -2 \quad lub \quad x = 0$$

27. Ogólna postać równania prostej, to $y = ax + b$. Ponieważ prosta ma być prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 5$, więc $a = 2$. Aby prosta przechodziła przez punkt $A = (1; 3)$ musi być spełniony warunek

$$3 = 2 \cdot 1 + b$$

$$3 = 2 + b$$

$$b = 1$$

Odpowiedź $\boldsymbol{y = 2x + 1}$

28.

$$\boldsymbol{\log_{\frac{1}{2}} x} > 3$$

Założenie

$$x > 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Ponieważ podstawa logarytmu jest mniejsza od 1 więc funkcja jest malejąca. Oznacza to, że

$$x < \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$x < \frac{1}{8}$$

Odpowiedź $\boldsymbol{x \in \left(0; \frac{1}{8}\right)}$

29.

$$\boldsymbol{144^x - 13 \cdot 12^x + 12} > 0$$

$$\boldsymbol{(12^2)^x - 13 \cdot 12^x + 12} > 0$$

$$\boldsymbol{12^{2x} - 13 \cdot 12^x + 12} > 0$$

Zastosujmy podstawienie

$$y = 12^x$$

Mamy wówczas

$$y^2 - 13y + 12 > 0$$

$$\Delta = 13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 169 - 48 = 121$$

$$\sqrt{\Delta} = 11$$

$$y_1 = \frac{13 - 11}{2} = 1 \quad i \quad y_2 = \frac{13 + 11}{2} = 12$$

$$y < 1 \quad lub \quad y > 12$$

$$12^x < 1 \quad lub \quad 12^x > 12$$

$$x < 0 \quad lub \quad x > 1$$

30.

$$S_n = 2n^2 + 2n$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 + 2n) - [2(n-1)^2 + 2(n-1)] =$$

$$= 2n^2 + 2n - [2(n^2 - 2n + 1) + 2n - 2] = 2n^2 + 2n - [2n^2 - 4n + 2 + 2n - 2] =$$

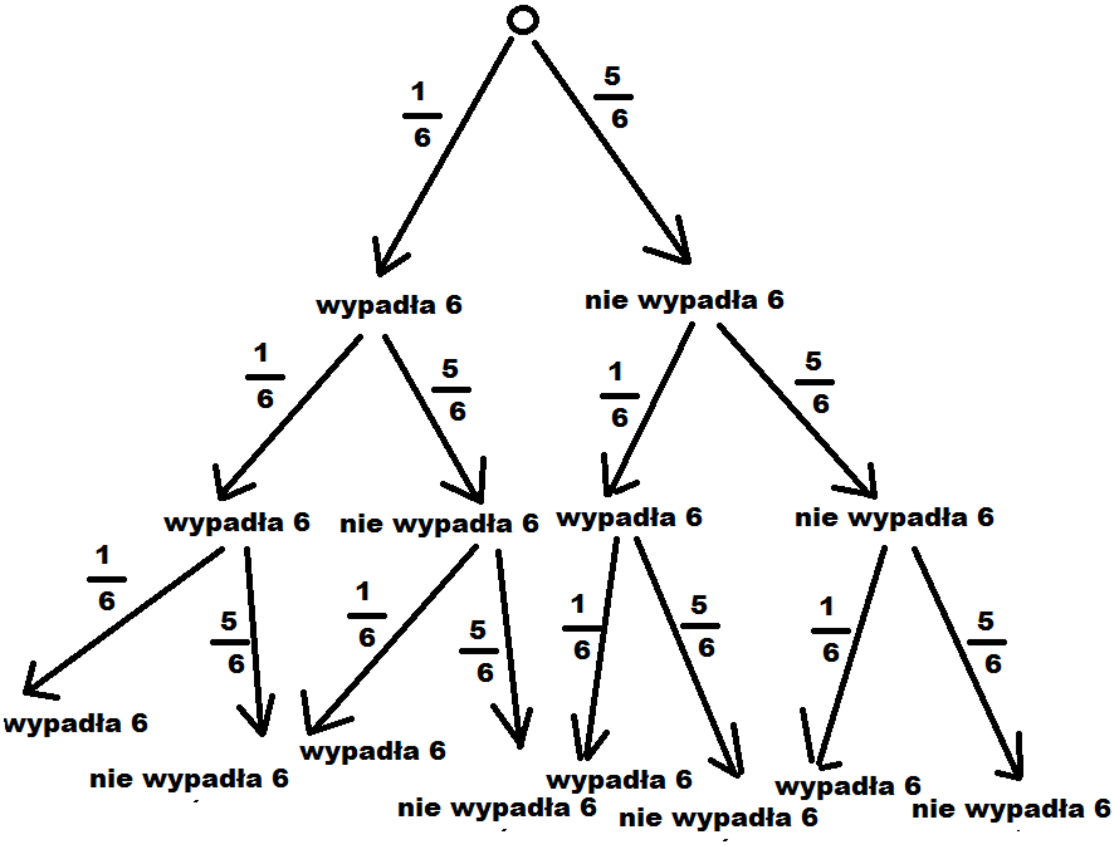
$$= 2n^2 + 2n - [2n^2 - 2n] = 2n^2 + 2n - 2n^2 + 2n = 4n$$

$$a_n = 4n$$

$$a_{n-1} = 4(n-1) = 4n - 4$$

$$r = a_n - a_{n-1} = 4n - (4n - 4) = 4n - 4n + 4 = 4$$

31.



Prawdopodobieństwo zdarzenia, że nie wypadła żadna 6 wynosi

$$P(A') = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

32.

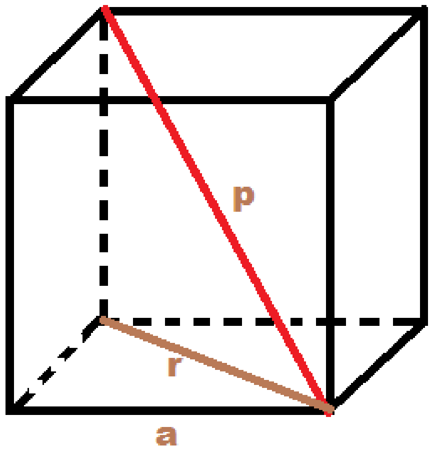
$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{7}{6} - \frac{2}{3} = \frac{7}{6} - \frac{4}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

33.



$$a^3 = 216$$

$$a = 6$$

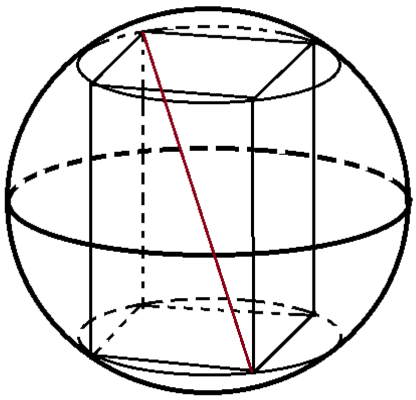
$$r^2 = 2 \cdot 6^2 = 2 \cdot 36 = 72$$

$$r = 6\sqrt{2}$$

$$p^2 = r^2 + a^2 = 72 + 36 = 108$$

$$p = 6\sqrt{3}$$

34.



Z rysunku widać, że przekątna sześcianu jest równa średnicy kuli

$$P = 4\pi r^2$$

$$4\pi r^2 = 16\pi$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2$$

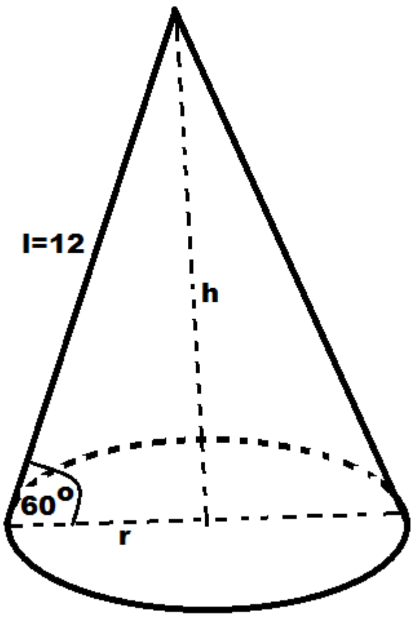
Ponieważ $p = a\sqrt{3}$

$$4 = a\sqrt{3}$$

$$a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$V = a^3 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{64 \cdot 3\sqrt{3}}{27} = \frac{64\sqrt{3}}{9}$$

35.



r=6

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{3} = 72\pi\sqrt{3}$$

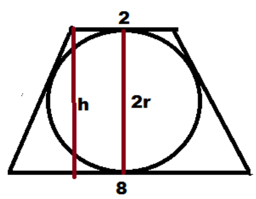
Zestaw rozszerzony

Zadania zamknięte

1. $a_k = a_0 + (k-1)r = m$; $a_m = a_0 + (m-1)r = k$; $a_k - a_m = a_0 + (k-1)r - a_0 - (m-1)r = r(k-m) = m-k$; $r = \frac{m-k}{k-m} = -1$; $a_{k+m} = a_k + r(k+m-k) = m + rm = m - m = 0$. Odpowiedź **D.**

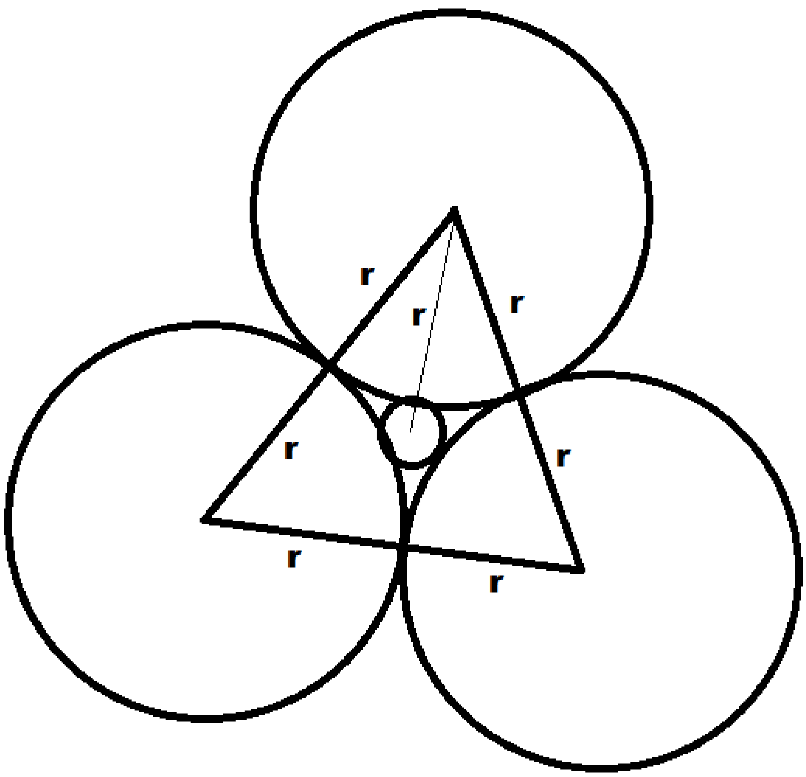
2. $lp = \frac{w\cdot(w-3)}{2} = \frac{10\cdot 7}{2} = 35$. Odpowiedź **C.**

3.



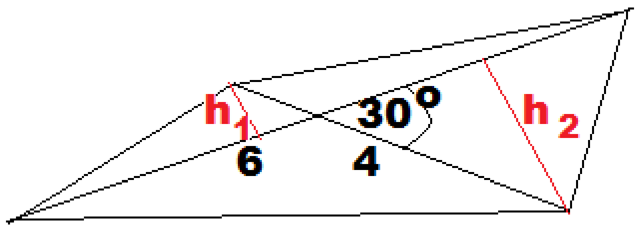
Aby w trapez można było wpisać okrąg, to suma długości jego ramion musi być równa sumie długości jego podstaw, czyli jedno ramię ma 5. Widoczny po lewej stronie trójkąt jest prostokątny o przeciwprostokątnej długości 5 i krótszej przyprostokątnej długości 4. Przyprostokątna ta jest zarazem wysokością trapezu i długością średnicy okręgu, czyli promień tego koręgu ma 2. Odpowiedź **D.**

4.



Jak widać, środki dużych okręgów są wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku 2r. Środek małego okręgu dzieli wysokość tego trójkąta w stosunku 2:1. Wysokość h trójkąta wynosi $h = \frac{(2r)\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$, czyli odległość między środkami dużego i małego okręgu wynosi $\frac{2}{3}h = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$. Promień małego okręgu $r_m = \frac{2r\sqrt{3}}{3} - r = \frac{2r\sqrt{3}-3r}{3} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}r$. Odpowiedź **A.**

5.



$h_1 = a \sin 30^\circ$; $h_2 = (4 - a) \sin 30\,^\circ$; $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot a \sin 30^\circ + \frac{1}{2}(4-a)\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \sin 30^\circ = 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 6.$ Odpowiedź **A.**

6. Z warunków zadania wynika, że istnieją takie dwa wielomiany P(x) i Q(x), że

$$W(x) = P(x) \cdot (x+1) + 3; \quad i \quad W(x) = Q(x)(x+2) + 4$$

Zauważmy, że

$$(x+1) \cdot (x+2) = x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$$

W takim razie istnieje taki wielomian R(x), że spełniony jest warunek

$$W(x) = R(x) \cdot (x^2 + 3x + 2) + (ax + b) = R(x) \cdot (x+1) \cdot (x+2) + (ax + b)$$

$$W(-1) = R(-1) \cdot (-1+1) \cdot (-1+2) + (-a) + b = -a + b = 3$$

$$W(-3) = R(-2) \cdot (-2+1) \cdot (-2+2) + (-2a) + b = -2a + b = 4$$

Trzeba rozwiązać następujący układ równań

$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ -2a + b = 4 \end{cases}$$

$$-a = 1$$

$$a = -1$$

$$b = 2$$

Odpowiedź: Reszta będzie miała postać: $-x + 2$

7.

$$x^{\log x} = x$$

Zakładamy, że $x > 0$

Nanieśmy na obie strony równania logarytm

$$\log x^{\log x} = \log x$$

$$\log x \cdot \log x = \log x$$

$$\log^2 x = \log \mathrm{x}$$

$$\log^2 x - \log \mathrm{x} = 0$$

$$\log x(\log x - 1) = 0$$

$$\log x = 0 \quad lub \quad \log x = 1$$

$$x = 10^0 = 1 \quad lub \quad x = 10^1 = 10$$

8.

$$4^x + 9^x \leq 2 \cdot 6^x$$

Podzielmy obustronnie przez 6^x i otrzymamy

$$\left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{9}{6}\right)^x \leq 2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x \leq 2$$

Zastosujmy podstawienie

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

Nasza nierówność będzie miała postać

$$y + \frac{1}{y} \leq 2$$

Pomnóżmy przez y

$$y^2 + 1 \leq 2y$$

$$y^2 - 2y + 1 \leq 0$$

$$(y-1)^2 \leq 0$$

$$y - 1 = 0$$

$$y = 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$$

$$x = 0$$

9.

$$x^2 - mx + 2 = 0$$

$$\Delta = m^2 - 8 > 0$$

$$(m - \sqrt{8})(m + \sqrt{8}) > 0$$

$$m < -\sqrt{8} \quad lub \quad m > \sqrt{8}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{m^2 - 8}$$

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 8}}{2} \quad i \quad x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 8}}{2}$$

$$2x_1 = x_2$$

$$m - \sqrt{m^2 - 8} = \frac{m + \sqrt{m^2 - 8}}{2}$$

$$2m - 2\sqrt{m^2 - 8} = m + \sqrt{m^2 - 8}$$

$$m = 3\sqrt{m^2 - 8}$$

Podnieśmy obie strony do kwadratu

$$m^2 = 9(m^2 - 8)$$

$$m^2 = 9m^2 - 72$$

$$8m^2 - 72 = 0$$

$$m^2 - 9 = 0$$

$$m = 3 \quad lub \quad m = -3$$

10.

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \cdots \leq 2x - 1$$

Po lewej stronie występuje szereg geometryczny o pierwszym wyrazie $\frac{x}{2}$, i o ilorazie $\frac{x}{2}$. Aby ten szereg był zbieżny musi być spełniony warunek:

$$-1 < \frac{x}{2} < 1$$

Co jest równoważne

$$-2 < x < 2$$

Wykorzystamy wzór na sumę szeregu geometrycznego

$$\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} \leq 2x-1$$

Ponieważ mianownik jest dodatni możemy obie strony pomnożyć przez mianownik

$$\frac{x}{2} \leq (2x-1)\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

$$x \leq (2x-1)(2-x)$$

$$x \leq 4x-2x^2-2+x$$

$$x \leq -2x^2+5x-2$$

$$2x^2-4x+2 \leq 0$$

$$x^2-2x+1 \leq 0$$

$$(x-1)^2 \leq 0$$

Lewa strona może być jedynie równa zero, czyli

$$x-1=0$$

$$x=1$$

11. Niech

$$\log_{a^k} b = t$$

Wówczas

$$(a^k)^t = b$$

Lub inaczej

$$a^{kt} = b$$

Czyli

$$\log_a b = kt$$

Podzielmy obie strony przez k

$$\frac{1}{k}\log_a b = t$$

Czyli

$$\frac{1}{k}\log_a b = \log_{a^k} b$$

Co należało dowieść.

12. Z pierwszego warunku zadania mamy równanie

$$\boldsymbol{6 - a = b - 6}$$

$$\boldsymbol{b = 12 - a}$$

Drugi warunek prowadzi do równania

$$\frac{6}{a-1} = \frac{b+4}{6}$$

$$(a-1)(b+4) = 36$$

Należy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} b = 12 - a \\ (a-1)(b+4) = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 12 - a \\ (a-1)(12 - a + 4) = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 12 - a \\ (a-1)(16 - a) = 36 \end{cases}$$

Rozwiążmy drugie równanie układu

$$(a-1)(16-a) = 36$$

$$16a - a^2 - 16 + a = 36$$

$$-a^2 + 17a - 16 = 36$$

$$-a^2 + 17a - 52 = 0$$

$$a^2 - 17a + 52 = 0$$

$$\Delta = 17^2 - 4 \cdot 52 = 289 - 208 = 81$$

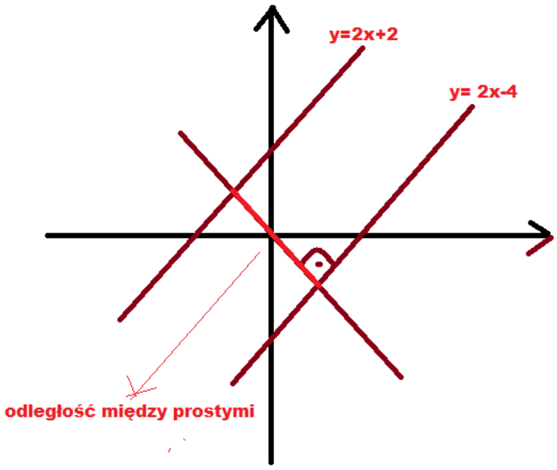
$$\sqrt{\Delta} = 9$$

$$a_1 = \frac{17-9}{2} = 4; \quad a_2 = \frac{17+9}{2} = 13$$

$$b_1 = 12 - 4 = 8; \quad b_2 = 12 - 13 = -1$$

Odpowiedź: $\begin{cases} \boldsymbol{a = 4} \\ \boldsymbol{b = 8} \end{cases}$; $\quad \boldsymbol{lub} \quad \begin{cases} \boldsymbol{a = 13} \\ \boldsymbol{b = -1} \end{cases}$

13. Popatrzmy na rysunek:



Prosta prostopadła do obu prostych ma równanie

$$y = -\frac{1}{2}x$$

Znajdźmy punkty przecięcia tej prostej z zadanymi prostymi

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}x = 2x - 4$$

$$x = -4x + 8$$

$$5x = 8$$

$$x = \frac{8}{5}$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$A = \left(\frac{8}{5}; -\frac{4}{5}\right)$$

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}x = 2x + 2$$

$$x = -4x - 4$$

$$5x = -4$$

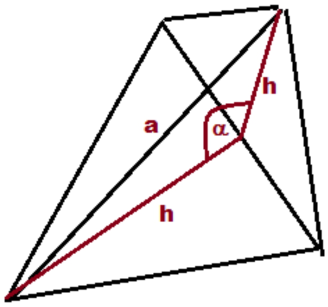
$$x = -\frac{4}{5}$$

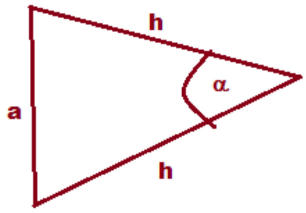
$$y = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

$$B = \left(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$$

$$|AB|=\sqrt{\left(-\frac{4}{5}-\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}-\left(-\frac{4}{5}\right)\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{12}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{36}{25}}=\sqrt{\frac{180}{25}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

14. Popatrz na rysunek





Wszystkie ściany czworościanu są trójkątami równobocznymi, więc h wynosi

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Korzystamy z twierdzenia kosinusów

$$2h^2-2h^2\cos\alpha=a^2$$

$$2h^2(1-\cos\alpha)=a^2$$

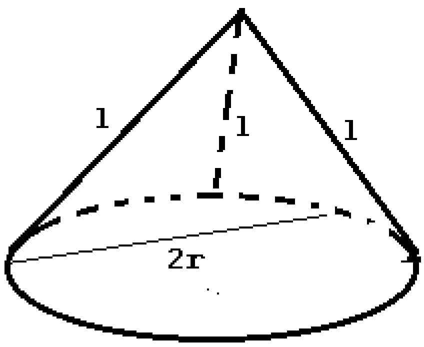
$$2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2(1-\cos\alpha)=a^2$$

$$2\cdot\frac{3a^2}{4}(1-\cos\alpha)=a^2$$

$$1-\cos\alpha=\frac{2a^2}{3a^2}$$

$$1-\cos\alpha=\frac{2}{3}$$

$$cos\alpha=\frac{1}{3}$$



15. Popatrz na rysunek

Końce tych trzech odcinków tworzą trójkąt równoboczny. Obliczmy bok tego trójkąta

$$2l^2=a^2$$

$$a = l\sqrt{2}$$

Wysokość tego trójkąta wynosi

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{6}}{2}$$

Promień podstawy stożka jest równy $\frac{2}{3}$ tej wysokości, czyli

$$r = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{l\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{l\sqrt{6}}{3}$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczmy wysokość stożka

$$l^2 - r^2 = H^2$$

$$l^2 - \left(\frac{l\sqrt{6}}{3}\right)^2 = H^2$$

$$l^2 - \frac{6l^2}{9} = H^2$$

$$l^2 - \frac{2}{3}l^2 = H^2$$

$$H^2 = \frac{1}{3}l^2$$

$$H = \frac{\sqrt{3}l}{3}$$

Objętość stożka wynosi

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{l\sqrt{6}}{3}\right)^2 \cdot \frac{l\sqrt{3}}{3} = \frac{l^2 \cdot 6}{9} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{9}\pi = \frac{2l^3\sqrt{3}}{27}\pi$$

16. A – wylosowano co najmniej jedną kulę białą.

B – wylosowano co najmniej jedną kulę czerwoną

$$P(A \cap B) = 1 - P\big((A \cap B)'\big) = 1 - P(A' \cup B') = 1 - \big(P(A') + P(B') - P(A' \cap B')\big) =$$

$$= 1 - P(A') - P(B') + P(A' \cap B') = 1 - \frac{\binom{20}{5}}{\binom{30}{5}} - \frac{\binom{20}{5}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{10}{5}}{\binom{30}{5}} = \frac{\binom{30}{5} - 2 \cdot \binom{20}{5} + \binom{10}{5}}{\binom{30}{5}}$$

$$= \frac{\frac{30!}{5! \cdot 25!} - 2 \cdot \frac{20!}{5! \cdot 15!} + \frac{10!}{5! \cdot 5!}}{\frac{30!}{5! \cdot 25!}} =$$

$$= \frac{\frac{26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - 2 \cdot \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}}{\frac{26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} =$$

$$= \frac{7 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 29 - 6 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 19 + 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 9}{7 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 29} =$$

$$= \frac{2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29 - 2^5 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7}{2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29} =$$

$$= \frac{2 \cdot 3(3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29 - 2^4 \cdot 17 \cdot 19 + 2 \cdot 3 \cdot 7)}{2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29} = \frac{(3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29 - 2^4 \cdot 17 \cdot 19 + 2 \cdot 3 \cdot 7)}{3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29}$$

$$= \frac{23751 - 5168 + 42}{23751} = \frac{18625}{23751} \approx 0{,}784$$

17. Oznaczmy $D = A \cup B$. Mamy

$$P(A \cup B \cup C) = P(D \cup C) = P(D) + P(C) - P(D \cap C) =$$

$$= P(A \cup B) + P(C) - P\big((A \cup B) \cap C\big) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - \Big(P(A \cap C) + P(B \cap C) - P\big((A \cap C) \cap (B \cap C)\big)\Big) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

18. Funkcja jest rosnąca, gdy pochodna tej funkcji jest niemniejsza od zera

$$f(x) = x^3 + mx^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2mx + 1$$

$$3x^2 + 2mx + 1 \geq 0$$

$$\Delta = 4m^2 - 12 \leq 0$$

$$m^2 - 3 \leq 0$$

$$\big(m - \sqrt{3}\big)\big(m + \sqrt{3}\big) \leq 0$$

$$-\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3}$$

19. Objętość walca to oczywiście

$$V = \pi r^2 h$$

Całkowite pole walca

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$$

Z ostatniego wzoru wyznaczmy h

$$P = 2\pi r(r + h)$$

$$r + h = \frac{P}{2\pi r}$$

$$h = \frac{P}{2\pi r} - r = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

Wyznaczone h podstawmy do wzoru na objętość

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{Pr - 2\pi r^3}{2}$$

Potraktujmy teraz objętość jako funkcję zmiennej r

$$V(r) = \frac{Pr - 2\pi r^3}{2}$$

Funkcja posiada ekstremum dla tego argumentu, dla którego pochodna równa jest 0

$$V'(r) = \frac{P - 6\pi r^2}{2}$$

Przyrównajmy pochodną do zera

$$\frac{P - 6\pi r^2}{2} = 0$$

$$P - 6\pi r^2 = 0$$

$$\left(\sqrt{P} - r\sqrt{6\pi}\right)\left(\sqrt{P} + r\sqrt{6\pi}\right) = 0$$

$$\sqrt{P} - r\sqrt{6\pi} = 0 \quad lub \quad \sqrt{P} + r\sqrt{6\pi} = 0$$

$$r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}} \quad lub \quad r = -\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$$

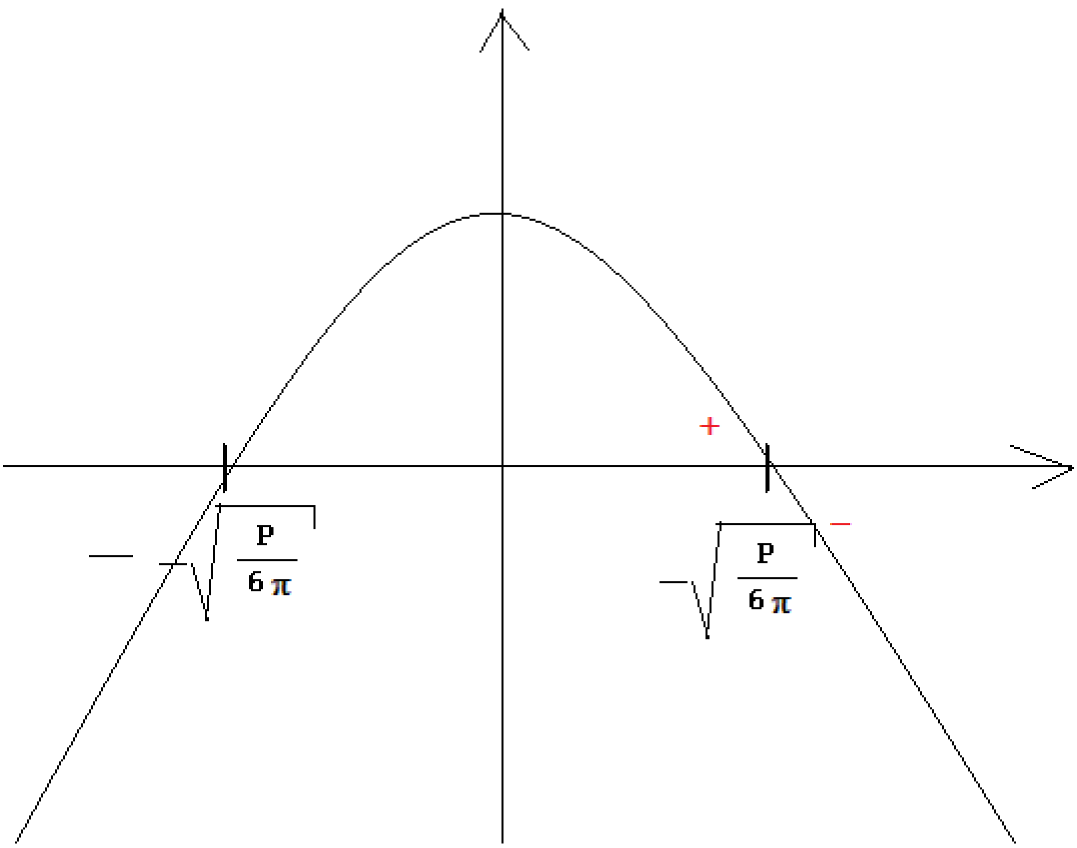
Drugi przypadek odpada bo r musi być dodatnie

Ekstremalne V wynosi

$$V=\frac{Pr-2\pi r^3}{2}=\frac{P\sqrt{\frac{P}{6\pi}}-2\pi\cdot\frac{P}{6\pi}\sqrt{\frac{P}{6\pi}}}{2}=\frac{P\sqrt{\frac{P}{6\pi}}-\frac{P}{3}\sqrt{\frac{P}{6\pi}}}{2}=\frac{P\sqrt{\frac{P}{6\pi}}}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{P\sqrt{\frac{P}{6\pi}}}{2}$$

$$=\frac{P}{3}\cdot\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$$

Pozostaje jeszcze odpowiedź na pytanie, czy jest to rzeczywiście objętość maksymalna. Aby tak było, to w lewym sąsiedztwie argumentu $r=\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$ funkcja musi być rosnąca, a w prawym sąsiedztwie punktu $r=\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$ malejąca, albo inaczej: na lewo od $r=\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$ pochodna $V'(r)$ musi być większe od zera, a na prawo od $r=\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$ pochodna $V'(r)$ musi być mniejsze od zera. Aby się przekonać, że tak jest popatrz na narysowany wykres funkcji $V'(r)$



20. Wykażemy najpierw, że dla dowolnych liczb rzeczywistych *u; v; w* zachodzi nierówność

$$u^2+v^2+w^2\geq uv+vw+wu$$

Istotnie

$$(u^2 + v^2 + w^2) - (uv + vw + wu) = \frac{1}{2}((u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2) \geq 0$$

Dokonajmy w początkowej nierówności następujących podstawień

$$u = a^2; \quad v = b^2; \quad w = c^2$$

Wtedy

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$$

Dokonamy teraz w początkowej nierówności podstawienia

$$u = ab; \quad v = bc; \quad w = ca$$

Wtedy

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq abbc + bcca + caab = ab^2c + bc^2a + ca^2b = abc(b + c + a)$$

Z dwóch ostatnich nierówności wynika, że

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(b + c + a)$$

Skoro liczby są dodatnie, to

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{a + b + c} \geq abc$$