Poszukiwania

Zadanie 1, 2 i 4.

Rozwiązanie będzie publikowane w artykule następnego, 71. wydania *Świata Matematyki.*

Zadanie 3.

A, B, C oraz *D* są pierwiastkami równania czwartego stopnia $x^4 - x + 2 = 0$. Czy $(AB + CD)$ jest pierwiastkiem równania $x^3 - 8x - 1 = 0$.

Rozwiązanie

Rozwiązanie I:

$(AB + CD)$ jest pierwiastkiem równania $x^3 - 8x - 1 = 0$.

Wyjaśnienie:

Przypuśćmy, że $P = A + B$; $Q = AB$; $R = C + D$ oraz $S = CD$.

Wtedy, porównując współczynniki różnych wykładników *x* w równości:

$$x^4 - x + 2 = (x - A)(x - B)(x - C)(x - D),$$

otrzymujemy:

(I) $0 = A+B+C+D = P+R$;

(II) $0 = AB+AC+AD+BC+BD+CD = PR+Q+S$;

(III) $1 = ABC+ABD+ACD+BCD = QR+PS$;

(IV) $2 = ABCD = QS$;

Na podstawie (I) otrzymujemy: $R = -P$; podstawiając to do (II), otrzymujemy:

(V) $Q + S = -PR = P^2$.

Lecz (IV) daje $Q = 2*(1/S)$ oraz, na podstawie (III) oraz (IV), otrzymujemy:

$$S + 2*(1/S) = P^2 \text{ oraz } P(S - 2*(1/S)) = 1;$$

lub

$$S + 2*(1/S) = P^2 \text{ oraz } S - 2*(1/S) = 1/P;$$

Lub

$$8 = P^4 - (1/P)^2 \text{ czyli } P^6 - 8*(P^2) - 1 = 0 \quad \text{(m)}$$

Jednak na podstawie (V) wiemy, że $P^2 = Q + S = AB + CD$.

Czyli, podstawiając $x = P^2$ do warunku (m), zauważamy, że $(AB + CD)$ rzeczywiście jest pierwiastkiem równania $x^3 - 8x - 1 = 0$.