Na medal

Zadanie 1.

Jeżeli pięciocyfrową liczbę ABCDE powiększymy trzykrotnie, to otrzymamy kwadrat pewnej liczby. Jeżeli naszą liczbę ABCDE rozdzielimy na dwie liczby, zachowując kolejność cyfr (np. 12345 na 1 oraz 2345 lub na 123 oraz 45), to pierwsza liczba jest dwa razy większa od drugiej liczby. Znajdź pięciocyfrową liczbę ABCDE.

Rozwiązanie

Aby warunki zadania były spełnione należy liczbę ABCDE podzielić na trzycyfrową liczbę ABC i dwucyfrową DE. Przyjmując, że

$$DE = y$$

Otrzymujemy zgodnie z założeniem, że:

$$ABC = 2y.$$

Ponieważ:

$$ABCDE = 100 \cdot ABC + DE$$

więc mamy:

$$ABCDE = 100 \cdot 2y + y = 200y + y = 201y.$$

Ponieważ trzykrotność liczby ABCDE jest kwadratem pewnej liczby, więc mamy:

$$603y = p^2.$$

Rozłóżmy liczbę 603 na czynniki:

$$603 = 3 \cdot 201 = 3 \cdot 3 \cdot 67 = 3^2 \cdot 67.$$

Liczba 603y będzie kwadratem, gdy:

$$y = 67$$

czyli

$$DE = 67,$$

a

$$ABC = 2y = 134.$$

Odpowiedź. Szukana liczba ABCDE to 13467

Zadanie 2.

Istnieje wiele par liczb, których suma równa się ich iloczynowi. Jednakże istnieje jedno rozwiązanie równania AB × C,DE = AB + C,DE w którym każda litera reprezentuje różną cyfrę. Jaką cyfrę reprezentuje każda litera?

Rozwiązanie

Mamy:

$$AB \cdot C,DE = AB + C,DE$$

więc

$$C,DE = \frac{AB + C,DE}{AB}$$

$$C,DE = 1 + \frac{C,DE}{AB} < 2,$$

czyli

$$C = 1.$$

Nasze równanie ma więc postać:

$$AB \cdot (1 + 0,DE) = AB + 1 + 0,DE$$

$$AB + AB \cdot 0,DE = AB + 1 + 0,DE$$

$$AB \cdot 0,DE = 1 + 0,DE$$

$$AB \cdot 0,DE - 0,DE = 1$$

$$(AB - 1) \cdot \frac{DE}{100} = 1$$

$$AB - 1 = \frac{100}{DE}.$$

Ponieważ $C = 1$ więc żadna z cyfr A; B; D i E nie może być równa 1. Oznacza to, że :

$$AB - 1 > 19,$$

tak, więc

$$D = 0.$$

Ostatnie równanie ma teraz postać

$$AB - 1 = \frac{100}{E}.$$

Zastosujmy metodę prób i błędów. Niech $E = 2$, wówczas $AB - 1 = 50$, a $AB = 51$, nie może tak być, bo $B = 1 = C$. Niech $E = 4, wówczas\ AB - 1 = 25, czyli\ AB = 26$ dobrze. Niech $E = 5, wówczas\ AB - 1 = 20, czyli\ AB = 21$, nie może tak być, bo $B = 1 = C$

Pozostaje przypadek:

$$E = 4.$$

Odpowiedź. Pod równaniem $AB \cdot C, DE = AB + C, DE$ ukrywa się równanie:

$$26 \cdot 1{,}04 = 26 + 1{,}04.$$

Zadanie 3.

Niech S będzie sumą wszystkich dodatnich liczb całkowitych n takich, że wyrażenie $n^2 + 12n - 2007$ jest kwadratem pewnej liczby. Znajdź resztę z dzielenia liczby S przez 1000.

Rozwiązanie

Niech zgodnie z warunkami zadania:

$$n^2 + 12n - 2007 = p^2 \quad gdzie \quad p \in N.$$

Wówczas:

$$n^2 + 12n - 2007 - p^2 = 0.$$

Znajdźmy wyróżnik powyższego równania kwadratowego:

$$\Delta = 12^2 + 4 \cdot (2007 + p^2) = 144 + 8028 + 4p^2 = 8172 + 4p^2.$$

Ponieważ równanie kwadratowe ma mieć pierwiastki będące liczbami całkowitymi dodatnimi, więc wyróżnik musi być kwadratem pewnej liczby całkowitej, czyli:

$$8172 + 4p^2 = q^2 \quad gdzie \quad q \in N.$$

Mamy więc:

$$q^2 - 4p^2 = 8172,$$

albo inaczej

$$(q - 2p)(q + 2p) = 8172.$$

Rozpatrzmy następujące przypadki:

$$(q - 2p)(q + 2p) = 1 \cdot 8172$$

$$(q - 2p)(q + 2p) = 2 \cdot 4086$$

$$(q - 2p)(q + 2p) = 3 \cdot 2724$$

$$(q - 2p)(q + 2p) = 4 \cdot 2043$$

$$(q - 2p)(q + 2p) = 6 \cdot 1362$$

$$(q - 2p)(q + 2p) = 9 \cdot 908$$

$$(q - 2p)(q + 2p) = 12 \cdot 681$$

$$(q-2p)(q+2p)=18\cdot 454$$

$$(q-2p)(q+2p)=36\cdot 227.$$

Pierwszy przypadek prowadzi do układu:

$$\begin{cases} q-2p=1 \\ q+2p=8172 \end{cases}$$

$$2q=8173$$

$$q\notin N.$$

Drugi przypadek:

$$\begin{cases} q-2p=2 \\ q+2p=4086 \end{cases}$$

$$2q=4088$$

$$q=2044$$

$$4p=4084$$

$$p=1021.$$

Trzeci przypadek:

$$\begin{cases} q-2p=3 \\ q+2p=2724 \end{cases}$$

$$2q=2727$$

$$q\notin N.$$

Czwarty przypadek:

$$\begin{cases} q-2p=4 \\ q+2p=2043 \end{cases}$$

$$2q=2047$$

$$q\notin N.$$

Piąty przypadek:

$$\begin{cases} q-2p=6 \\ q+2p=1362 \end{cases}$$

$$2q=1368$$

$$q=684$$

$$4p=1356$$

$$p=339.$$

Szósty przypadek:

$$\begin{cases} q - 2p = 9 \\ q + 2p = 908 \end{cases}$$

$$2q = 917$$

$$q \notin N.$$

Siódmy przypadek:

$$\begin{cases} q - 2p = 12 \\ q + 2p = 681 \end{cases}$$

$$2q = 693$$

$$q \notin N.$$

Ósmy przypadek:

$$\begin{cases} q - 2p = 18 \\ q + 2p = 454 \end{cases}$$

$$2q = 472$$

$$q = 236$$

$$4p = 436$$

$$p = 109.$$

Dziewiąty, ostatni przypadek:

$$\begin{cases} q - 2p = 36 \\ q + 2p = 227 \end{cases}$$

$$2q = 263$$

$$q \notin N.$$

Okazało się, że warunki spełniają tylko trzy przypadki i w tych dobrych przypadkach:

$$\sqrt{\Delta} = 2044 \quad lub \quad \sqrt{\Delta} = 684 \quad lub \quad \sqrt{\Delta} = 236.$$

Wyznaczmy teraz n:

$$n_1 = \frac{-12 - 2044}{2} = \frac{-2056}{2} = -1028$$

$$n_2 = \frac{-12 + 2044}{2} = \frac{2032}{2} = 1016$$

$$n_3 = \frac{-12 - 684}{2} = \frac{-696}{2} = -348$$

$$n_4 = \frac{-12 + 684}{2} = \frac{672}{2} = 336$$

$$n_5 = \frac{-12 - 236}{2} = \frac{-248}{2} = -124$$

$$n_6 = \frac{-12 + 236}{2} = \frac{224}{2} = 112.$$

Oczywiście interesują nas tylko n dodatnie. Mamy więc:

$$S = 1016 + 336 + 112 = 1464$$

Odpowiedź. $1464 : 1000 = 1$ i reszta wynosi 464.