szkic rozwiązania - Witold Bednarek

EGZAMIN ÓSMOKLASISTY (4)

(zadania zamknięte)

Zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Odp.	B	C	C	D	B	A	D	D	A	B	C	D	B	D	PiF	FiF

(zadania otwarte)

Zadanie 17.

Liczby m–1 i m są dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi, a więc jedna z nich jest parzysta. Zatem iloczyn (m–1)·m jest podzielny przez 2. Liczby m–1, m, m+1 są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, a więc jedna z nich jest podzielna przez 3, a więc iloczyn (m – 1)·m·(m + 1) jest podzielny przez 3.

W konsekwencji iloczyn (m – 1) ·m· (m + 1) jest podzielny przez 2·3 = 6.

Zadanie 18.

Niech x oznacza liczbę lat, które upłynęły od czasu, gdy matka ma 40 i córka ma 15 lat do czasu, gdy matka będzie dwa razy starsza od córki. Wtedy matka będzie miała 40 + x lat, a córka będzie miała 15 + x lat.

Zgodnie z warunkiem zadania mamy równanie:

$$40 + x = 2\cdot (15 + x).$$

Stąd mamy (po rozwiązaniu równania) odpowiedź: x = 10 (lat).

Zadanie 19.

$(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c) = (aa + ab + ac) + (ba + bb + bc) + (ca + cb + cc) = (a^2 + ab + ac) +$
$+ (ba + b^2 + bc) + (ca + cb + c^2) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$

Zadanie 20.

Zauważmy, że $5^2 + 12^2 = 13^2$. Zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że podany trójkąt jest prostokątny. Zatem jego pole wynosi:

$$\tfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 5 = 30\ (cm^2)$$ (dlaczego?).

Zadanie 21.

Oznaczmy przez R i r odpowiednio promień większego i mniejszego koła. Mamy wtedy równania:

$$2\pi R + 2\pi r = 16\pi \quad \text{oraz} \quad \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{25}{9}$$ (dlaczego?).

Stąd mamy kolejno:

$$R + r = 8 \quad \text{i} \quad \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{25}{9}.$$

Z ostatniego równania otrzymujemy $\frac{R}{r} = \frac{5}{3}$, czyli $R = \frac{5}{3}r$.

Ponieważ R + r = 8, to $\frac{5}{3}r + r = 8$, skąd r = 3 (cm).

Następnie wyznaczamy $R = \frac{5}{3}r = \frac{5}{3}\cdot 3 = 5$ (cm).

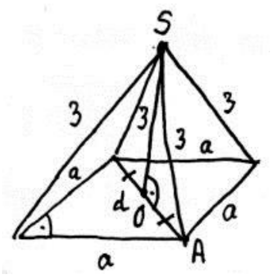
Odpowiedź: promienie kół wynoszą 5 cm i 3 cm.

Zadanie 22.

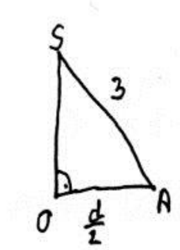
Oznaczmy krawędź sześcianu przez a. Wtedy $6a^2 = 24$ (dlaczego?). Stąd a = 2 (cm). Zatem objętość sześcianu wynosi $a^3 = 2^3 = 8$ (cm^3).

Zadanie 23.

Spójrz na rysunek 1:



rys. 1



rys. 2

Mamy równanie $a^2 = 16$ (dlaczego?). Stąd a = 4 (cm).

Na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy równanie:

$a^2 + a^2 = d^2$, czyli $2a^2 = d^2$, a zatem $2\cdot 4^2 = d^2$, skąd $d = 4\sqrt{2}$ (cm).

Na podstawie rysunku 2 i twierdzenia Pitagorasa mamy równanie:

$$|OA|^2 + |OS|^2 = |AS|^2,$$

czyli

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + |OS|^2 = 3^2,$$

a więc

$$(2\sqrt{2})^2 + |OS|^2 = 9.$$

Stąd $|OS|^2 = 1$, czyli $|OS| = 1$ (cm); OS jest wysokością ostrosłupa.

Stosując wzór na objętość ostrosłupa, otrzymujemy

$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot |OS| = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 1 = 5\frac{1}{3}\ .$$