szkic rozwiązania – Witold Bednarek

Dla najlepszych

Zadanie 1.

Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele takich trójek liczb naturalnych x, y, z > 0, że:

a) $x^2 + y^2 = z^3$, b) $x^3 + y^3 = z^2$.

Rozwiązanie: oto przykłady

a) $x = y = 2^{3k+1}$ i $z = 2^{2k+1}$ dla k = 0, 1, 2, …
b) $x = y = 2^{2k+1}$ i $z = 2^{3k+2}$ dla k = 0, 1, 2, …

Zadanie 2.

Wykaż, że: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\infty.$

Rozwiązanie:

Granica nieskończona wynika z następujących nierówności:

1/3 + ¼ > 2 * ¼ = ½,

1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 > 4 * 1/8 = ½,

1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 > 8 * 1/6 = ½,

1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 +
+ 1/30 + 1/31 + 1/32 > 16/32 = ½,

… itd

Zadanie 3.

Przedstaw liczby pierwsze: 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101 w postaci sumy kwadratów dwóch liczb naturalnych.

Odpowiedź:

$37 = 1^2 + 6^2$, $41 = 3^2 + 4^2$, $53 = 2^2 + 7^2$, $61 = 4^2 + 5^2$, $73 = 3^2 + 8^2$,
$89 = 5^2 + 8^2$, $97 = 4^2 + 9^2$, $101 = 1^2 + 10^2$.