szkic rozwiązania – Witold Bednarek

PRAWDOPODOBNIE

Zadanie 1.

Udowodnij, że dla dowolnych zdarzeń *A*, *B*, *C* zachodzi równość:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C).$$

Rozwiązanie

$$P(A\cup B\cup C) = P((A\cup B)\cup C) = P(A\cup B) + P(C) - P((A\cup B)\cap C) = (P(A) + P(B) - P(A\cap B)) + P(C) - P((A\cap C)\cup(B\cap C)) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - (P(A\cap C) + P(B\cap C) - P((A\cap C)\cap(B\cap C))) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$$

Zadanie 2.

Wykaż, że dla dowolnych zdarzeń A i B zachodzą równości:

(a) $P(A' \cup B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B)$

(b) $P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

Rozwiązanie

(a) Na mocy prawa de Morgana mamy równość $A' \cup B' = (A \cap B)'$. Zatem:

$$P(A'\cup B') = P((A\cap B)') = 1 - P(A\cap B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A\cup B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A\cup B)$$

(a) Na mocy prawa de Morgana mamy równość $(A'\cap B') = (A\cup B)'$. Zatem:

$$P(A'\cap B') = P((A\cup B)') = 1 - P(A\cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A\cap B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B)$$

Zadanie 3.

Zdarzenia C i D spełniają warunek: $P(C\setminus D) = P(C) - P(D)$ Wykaż, że $D \subset C$.

Rozwiązanie

Mamy $C = (C\setminus D)\cup(C\cap D)$, przy czym zdarzenia $C\setminus D$ i $C\cap D$ wykluczają się. Zatem:

$$P(C) = P((C\setminus D)\cup(C\cap D)) = P(C\setminus D) + P(C\cap D).$$

Korzystając z podanego warunku na równość:

$$P(C) = P(C) - P(D) + P(C\cap D),$$

czyli

$$(*)\quad P(D) = P(C\cap D) .$$

Skoro $C\cap D \subset D$, to $P(C\cap D) \leqslant P(D)$.

Zatem równość (*) będzie zachodziła wtedy, gdy $C\cap D = D$, czyli $D \subset C$.

Zadanie 4.

Z talii kart wyciągamy jedną kartę. Niech A oznacza, że wylosowano asa lub króla, zaś B oznacza, że wylosowano kiera lub karo. Uzasadnij, że zdarzenia A i B są niezależne.

Rozwiązanie

Mamy $P(A)=\frac{8}{52}=\frac{2}{13}$ i $P(B)=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$

$A\cap B=$ {As kier, As karo, Król kier, Król karo}, $P(A\cap B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$.

Zatem $P(A\cap B)=\frac{1}{13}=P(A)\cdot P(B)$, czyli zdarzenia A i B są niezależne.

Zadanie 5.

Z talii kart losujemy dwie karty. Niech A oznacza, że wylosowano dwa asy, zaś B oznacza, że wylosowano jednego kiera i jednego pika. Sprawdź, czy zdarzenia A i B są niezależne.

Rozwiązanie

Mamy:

$$\overline{\overline{\Omega}}=\binom{5}{12}=1326;\quad \overline{\overline{A}}=\binom{4}{12}=6;\quad \overline{\overline{B}}=13\cdot 13=169;\quad \overline{\overline{A\cap B}}=1$$

Wynika stąd, że:

$$P(A\cap B)=\frac{1}{1326}\ \text{ i }\ P(A)\cdot P(B)=\frac{6}{1326}\cdot\frac{169}{1326}=\frac{1}{1734}.$$

Zatem:

$P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$, czyli zdarzenia A i B są niezależne.

Zadanie 6.

Rzucamy dwiema kostkami do gry. Niech A oznacza, że nie wyrzucono szóstki, zaś B oznacza, że suma liczby oczek jest parzysta. Sprawdź, czy zdarzenia A i B są zależne.

Rozwiązanie

$\Omega=\{(i,j): i,j=1,2,3,4,5,6\},\ \overline{\overline{\Omega}}=6\cdot 6=36,$

$A=\{(i,j): i,j=1,2,3,4,5\},\ \overline{\overline{A}}=5\cdot 5=25,$

$B=\{(i,j): i+j=2,4,6,8,10,12,\ i,j=1,2,3,4,5,6\},\ \overline{\overline{B}}=18,$

$A\cap B=\{(i,j): i+j=2,4,6,8,10,\ i,j=1,2,3,4,5\},\ \overline{\overline{A\cap B}}=13$

Mamy $P(A\cap B)=\frac{13}{36}$ i $P(A)\cdot P(B)=\frac{25}{36}\cdot\frac{18}{36}=\frac{25}{72}$, zatem $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$, czyli zdarzenia A i B

są zależne.

Zadanie 7.

Z talii losujemy pięć razy po dwie karty ze zwrotem [wylosowanych kart] do talii. Oblicz prawdopodobieństwo, że trzy razy wylosujemy parę asów.

Rozwiązanie

Mamy n=5, k=3, $p = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \dfrac{6}{1326} = \dfrac{1}{221},\ q = \dfrac{220}{221}$.

$$p_{3,5} = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{221}\right)^3 \cdot \left(\frac{220}{221}\right)^2 = 10 \cdot \frac{220^2}{221^5} \approx 0,0000000918$$

Zadanie 8.

Rzucamy dziesięć razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyrzucono więcej orłów niż reszek.

Rozwiązanie

Prawdopodobieństwo, że wyrzucono więcej orłów niż reszek, jest takie samo, jak prawdopodobieństwo, że wyrzucono więcej reszek niż orłów, ponieważ moneta jest symetryczna.
Oznaczmy te prawdopodobieństwa przez s. Prawdopodobieństwo, że wyrzucono tyle samo reszek, co orłów, zgodnie ze schematem Bernoulliego wynosi:

$$\binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{252}{1024} = \frac{63}{256}$$

Zatem mamy równanie:

$$s + \frac{63}{256} + s = 1, \text{ skąd } s = \frac{193}{512}$$

Zadanie 9.

Celujemy igłą w tarczę koła o promieniu równym 10. Oblicz prawdopodobieństwo trafienia w ustalony kwadrat wpisany w to koło.

Rozwiązanie

$$S(\Omega) = \pi \cdot 10^2 = 100\pi,\ S(K) = 200. \text{ Stąd } P(K) = \frac{200}{100\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Zadanie 10.

Niech Ω będzie kwadratem o boku równym 1 i wierzchołkach K, L, M, N. Niech A będzie zdarzeniem polegającym na trafieniu igłą w półkole o średnicy KL, zaś B oznacza trafienie igłą w półkole o średnicy LM. Sprawdź niezależność zdarzeń A i B.

Rozwiązanie

$$S(\Omega) = 1,\ S(A) = \frac{\pi}{8},\ S(B) = \frac{\pi}{8},\ S(A \cap B) = \frac{\pi - 2}{8}.$$

Stąd $P(A)=\frac{\pi}{8},\ P(B)=\frac{\pi}{8},\ P(A\cap B)=\frac{\pi-2}{8}, P(A)\cdot P(B)=\frac{\pi^2}{64}.$

Sprawdzamy, że $P(A\cap B)=\frac{\pi-2}{8}\neq\frac{\pi^2}{64}=P(A)\cdot P(B)$.

Zdarzenia A i B są zależne.