Operacja liczba

Zadanie 1.

Uzasadnij, że prawdziwa jest następująca nierówność:

$$3 < \sqrt{\underbrace{10+\sqrt{10+\sqrt{10+\cdots+\sqrt{10}}}}_{100\ dziesiątek}} < 4$$

Rozwiązanie:

$$3 = \sqrt{\underbrace{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}}_{99\ szóstek}} < \sqrt{\underbrace{10+\sqrt{10+\sqrt{10+\cdots+\sqrt{10}}}}_{100\ dziesiątek}} <$$

$$< \sqrt{\underbrace{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\cdots+\sqrt{12+\sqrt{16}}}}}_{99\ dwónastek}} = 4$$

Zadanie 2.

Wyznacz z dokładnością do 100 cyfr po przecinku: $\sqrt{0{,}24\ \underbrace{999\ldots99}_{100 dziewiątek}}$

Rozwiązanie:

Niech

$$a = \sqrt{0{,}24\ \underbrace{999\ldots99}_{100\ dziewiątek}} = \sqrt{0{,}24+0{,}00\ \underbrace{999\ldots99}_{100\ dziewiątek}} = \sqrt{0{,}24+(0{,}01-0{,}1^{102})} =$$

$$= \sqrt{0{,}25-0{,}1^{102}}$$

Zajmijmy się teraz liczbą 2a

$$2a = 2\sqrt{0{,}25-0{,}1^{102}} = \sqrt{4\cdot(0{,}25-0{,}1^{102})} = \sqrt{1-4\cdot 0{,}1^{102}}$$

Prawdziwa jest następująca nierówność

$$1 > \sqrt{1-4\cdot 0{,}1^{102}}$$

Podnosząc obie strony do kwadratu mamy

$$1 > 1 - 4 \cdot 0{,}1^{102}$$

Prawdziwa jest też nierówność

$$1 - 4 \cdot 0{,}1^{102} > (1 - 4 \cdot 0{,}1^{102})^2$$

Zachodzi więc nierówność podwójna

$$1 > 1 - 4 \cdot 0{,}1^{102} > (1 - 4 \cdot 0{,}1^{102})^2$$

Nanieśmy pierwiastki na wszystkie strony nierówności

$$\sqrt{1} > \sqrt{1 - 4 \cdot 0{,}1^{102}} > \sqrt{(1 - 4 \cdot 0{,}1^{102})^2}$$

$$1 > \sqrt{1 - 4 \cdot 0{,}1^{102}} > 1 - 4 \cdot 0{,}1^{102} = 0,\ \underbrace{999 \ldots 99}_{101\ dziewiątek}\ 6$$

Jeżeli

$$1 > 2a > 0,\ \underbrace{999 \ldots 99}_{101\ dziewiątek}\ 6$$

To

$$0{,}5 > a > 0{,}4\ \ \underbrace{999 \ldots 99}_{100\ dziewiątek}\ 8$$

Tak więc, z dokładnością do stu cyfr po przecinku

$$\sqrt{0{,}24\ \ \underbrace{999 \ldots 99}_{100 dziewiątek}} \approx 0{,}4\ \ \underbrace{999 \ldots 99}_{99\ dziewiątek}$$

Zadanie 3.

Dane są dwie liczby $a = \sqrt{23}$ i $b = 7 - \sqrt[3]{7}$. Która z tych liczb jest większa?

Załóżmy, że

$$a > b$$

Czyli

$$\sqrt{23} > 7 - \sqrt[3]{7}$$

$$\sqrt[3]{7} > 7 - \sqrt{23}$$

$$7 > 343 - 147\sqrt{23} + 483 - 23\sqrt{23}$$

$$7 > 826 - 170\sqrt{23}$$

$$170\sqrt{23} > 819$$

$$664700 > 670761$$

Założenie było błędne, więc

$$7 - \sqrt[3]{7} > \sqrt{23}$$