Witold Bednarek – szkic rozwiązania

Pochód funkcji

Zadanie 1.

Znajdź tangens kąta ostrego, pod jakim przecinają się wykresy funkcji $f(x) = x^2 \quad i \quad g(x) = x^3 \quad dla \quad x \in R$ w punkcie $P(1; 1)$.

Rozwiązanie

Niech α i β oznaczają kąty, które tworzą z osią OX styczne do wykresów funkcji f i g w punkcie $P(1; 1)$. Poszukiwany kąt oznaczmy przez ɣ. Mamy

$$\tan\alpha = f'(1) = 2, \ \ bo \ \ f'(x) = 2x$$

$$\tan\beta = g'(1) = 3, \ \ bo \ \ g'(x) = 3x^2$$

Zatem

$$\tan\gamma = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = \frac{3-2}{1+3\cdot 2} = \frac{1}{7}$$

Zadanie 2.

Uzasadnij, że wykresy funkcji $f(x) = \sqrt{x} \quad i \quad g(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - x}$ przecinają się pod kątem prostym.

Rozwiązanie

Punkt wspólny wykresów to $P\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ (dlaczego?). Obliczamy współczynniki kierunkowe $k_1 \quad i \quad k_2$ stycznych:

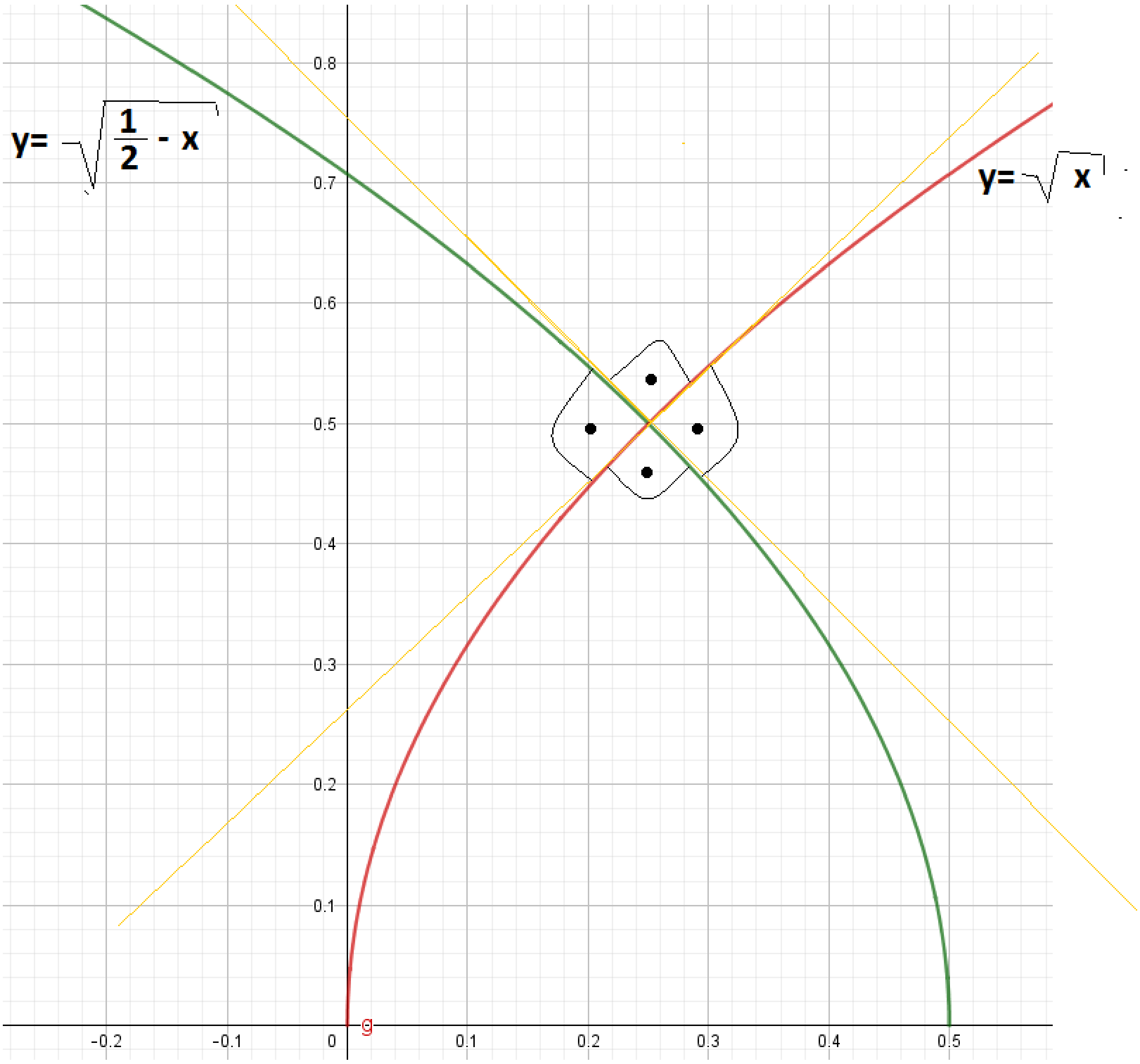
$$k_1 = 1, \ \ bo \ \ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad i \quad f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = 1$$

Oraz

$$k_2 = -1, \ \ bo \ \ g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{1}{2} - x}} \quad i \quad g'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}} = -1$$

W konsekwencji $k_1 \cdot k_2 + 1 = 0$, co oznacza prostopadłość tych stycznych.

Oto ilustracja graficzna



Zadanie 3.

Udowodnij twierdzenie Lagrange'a, czyli wzór $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ (przy odpowiednich założeniach), zawarty w artykule „Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego.

Wskazówka

Przyjmij

$$g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) - f(x) + f(a) \;\; dla \;\; x \in \langle a; b \rangle.$$

Sprawdź, że tak określona funkcja g spełnia założenia twierdzenia Rolle'a i zastosuj to twierdzenie.

Zadanie 4.

Stosując twierdzenie Lagrange'a, udowodnij nierówność Bernuliego:

$$(1+t)^m > 1 + mt \quad dla \quad t \in (-1;\ \infty)\backslash\{0\} \quad i \quad m > 1$$

Wskazówka

Rozważ funkcję $f(x) = x^m$ dla $x > 0$ oraz rozważ dwa przypadki

1. $a = 1, b = 1 + t \quad dla \quad t > 0$

2. $a = 1 + t, b = 1 \quad dla \quad -1 < t < 0$