Nieprawdopodobne

Zadanie 1.

Rzucamy jednocześnie trzema monetami. Ile razy średnio musimy rzucać, aby pojawiły się trzy orły?

Rozwiązanie:

Wszystkich zdarzeń elementarnych jest osiem, a więc prawdopodobieństwo zdarzenia, że wypadną trzy orły wynosi $\frac{1}{8}$. Trzeba rzucać średnio 8 razy.

Zadanie 2.

Posiadamy dwa pudełka z kulami. W pierwszym pudełku znajduje się a kul białych i b kul czarnych. W drugim pudełku znajduje się b kul białych i a kul czarnych. Rzucamy kostką do gry. Jeśli liczba oczek okaże się podzielna przez 3, losujemy jedną kulę z pierwszego pudełka, w przeciwnym razie – jedną kulę z drugiego pudełka. Okazało się, że wylosowano kulę czarną. Oblicz prawdopodobieństwo, że pochodzi ona z drugiego pudelka.

Rozwiązanie:

Niech

B_1 – zdarzenie polegające na losowaniu kuli z pierwszego pudełka

B_2 – zdarzenie polegające na losowaniu kuli z drugiego pudełka

Wówczas

$$P(B_1) = \frac{1}{3}; \quad P(B_2) = \frac{2}{3}; \quad P(A/B_1) = \frac{b}{a+b}; \quad P(A/B_2) = \frac{a}{a+b}$$

Ze wzoru Bayesa otrzymujemy:

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2)\cdot P(A/B_2)}{P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{a+b}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{b}{a+b} + \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{a+b}} = \frac{\frac{2a}{a+b}}{\frac{b}{a+b} + \frac{2a}{a+b}}$$

$$= \frac{\frac{2a}{a+b}}{\frac{b+2a}{a+b}} = \frac{2a}{b+2a}$$

Zadanie 3.

Wracamy do zadania „Gra monetami”, z bieżącego wydania „Świata Matematyki”. Rozważmy następującą grę między dwiema osobami A i B. Gracze rzucają symetryczną monetą – prawdopodobieństwa wypadnięcia orła czy reszki są sobie równe. Jeśli wypadnie orzeł, gracz A otrzymuje jeden punkt, a gdy wypadnie reszka, gracz B otrzymuje jeden punkt. Gra toczy się do momentu, gdy któryś z graczy osiągnie N punktów. Niech $P(m;n)$oznacza prawdopodobieństwo wygrania przez gracza A w chwili, gdy ma on w sumie m punktów, a gracz B zdobył n punktów. Dla $N = 3$ wyznacz wszystkie prawdopodobieństwa $P(m;n \quad dla \quad 0 \leq n \leq m \leq 2.)$

Rozwiązanie

$P(2;2) = \frac{1}{2}$ co jest oczywiste

$P(2;1) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ (aby wygrać, gracz B musiałby wyrzucić dwie reszki)

$P(2;0) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$ (aby wygrać, gracz B musiałby wyrzucić trzy reszki)

$P(1;1) = \frac{1}{2}$ co jest oczywiste.

$P(1;0) = \frac{1}{2} \cdot P(2;0) + \frac{1}{2} \cdot P(1;1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{16}$ (prawdopodobieństwo całkowite

$P(0;0)$ co jest oczywiste.

Zadanie 4.

Niech $P(A) = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{1}{2}; P(C) = \frac{1}{2}$. Wykaż, że $P(A \cap B) \geq \frac{1}{6}$ lub $P(B \cap C) \geq \frac{1}{6}$ lub $P(C \cap A) \geq \frac{1}{6}$

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że $P(A \cap B) < \frac{1}{6}$ i $P(B \cap C) < \frac{1}{6}$ i $P(C \cap A) < \frac{1}{6}$. Mamy

$$1 \geq P(A \cup B \cup C) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C) \geq$$

$$\geq P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) >$$

$$> P(A) + P(B) + P(C) - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = P(A) + P(B) + P(C) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

A więc sprzeczność

Zadanie 5.

Zdarzenia zespołowo niezależne to takie, kiedy rezultat jednego zdarzenia nie ma wpływu na inne zdarzenia. Niech zdarzenia $A_1;\ A_2; \dots;\ A_n$ będą zespołowo niezależne, oraz $P(A_i) = p_i$ dla $i = 1; 2; \dots; n$. Wykaż, że: $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot \dots \cdot (1 - p_n)$.

Rozwiązanie:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P\big((A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)'\big) = 1 - P(A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_n) =$$

$$= 1 - P(A'_1) \cdot P(A'_2) \cdot \dots \cdot P(A'_n) = 1 - \big(1 - P(A_1)\big)\big(1 - P(A_2)\big) \dots \big(1 - P(A_n)\big) =$$

$$= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n)$$