Liczenie na szachownicy

Zadanie 1.

Przy pomocy szachownicy wyznacz wartości dla:

a) $\sqrt{255}$

b) $\sqrt{9865881}$

Rozwiązanie:

a) 15,9687…

b) 3141

Zadanie 2.

Oblicz, jakie cyfry ukrywają się pod poszczególnymi literami pamiętając, że różnym literom odpowiadają różne cyfry, a ta sama litera oznacza tę samą cyfrę dla:

$$\sqrt{ABCDEFGHI} = BBDDG$$

Rozwiązanie:

Ponieważ liczba podpierwiastkowa składa się z nieparzystej ilości cyfr, więc musi zachodzić następująca nierówność:

$$B^2 \leq A < 10$$

Oznacza to, że

$$B \in \{1; 2; 3\}$$

Niech więc B=1

Wówczas

$$A \in \{2; 3\}$$

Ponieważ druga od lewej cyfra pierwiastka, to też B, więc zachodzić musi warunek:

$$11^2 \leq 100A + 10 + C < 12^2$$

$$121 \leq 100A + 10 + C < 144$$

Ale $A > 1$ czyli liczba $100A + 10 + C > 200$, nie może być więc mniejsza od 144. Oznacza to, że $B \neq 1$

Załóżmy teraz, że B=3. Wówczas A=9

Musi zachodzić następująca nierówność:

$$33^2 \leq 930 + C < 34^2$$

$$1089 \leq 930 + C < 1156$$

Ponieważ liczba 930+C jest na pewno mniejsze od 1000 więc $B \neq 3$

Jeżeli nasze zadanie ma rozwiązanie, to B=2, a $A \in \{4; 5; 6; 7; 8\}$ i zachodzi nierówność

$$22^2 \leq 100A + 20 + C < 23^2$$

$$484 \leq 100A + 20 + C < 529$$

Ta podwójna nierówność będzie spełniona jedynie dla A=5

$$520 + C - 484 = 36 + C$$

Zgodnie z algorytmem obliczania pierwiastka zachodzi kolejna nierówność:

$$(440 + D) \cdot D \leq 3600 + 100C + 10D + E < (440 + D + 1) \cdot (D + 1)$$

Zajmijmy się nierównością:

$$3600 + 100C + 10D + E < (440 + D + 1) \cdot (D + 1)$$

Dla D=9 mamy:

$$3600 + 100C + 10 \cdot 9 + E < 4500$$

Nierówność jest prawdziwa.

Niech teraz D=8, otrzymamy:

$$3600 + 100C + 10 \cdot 8 + E < 4041$$

Nierówność jest też prawdziwa.

Niech teraz D=7

$$3600 + 100C + 10 \cdot 7 + E < 3584$$

Nierówność nieprawdziwa, czyli D=8 lub D=9

Sprawdźmy teraz nierówność:

$$(440 + D) \cdot D \leq 3600 + 100C + 10D + E$$

Niech D=8, wówczas

$$3584 \leq 3680 + 100C + E$$

Nierówność prawdziwa

Wówczas reszta równa się

$$3680 + 100C + E - 3584 = 96 + 100C + E$$

Niech D=9, wówczas

$$4041 \leq 3690 + 100C + E$$

Ta nierówność będzie prawdziwa pod warunkiem, że $C \geq 4$

Wyznaczmy resztę

$$3690 + 100C + E - 4041 = 100C + E - 351$$

Tak, więc należy osobno sprawdzić dwa przypadki

Przypadek I D=8

Przypadek II D=9

I. Niech D=8.

Zachodzić musi następująca podwójna nierówność

$$4568 \cdot 8 \leq 9600 + 10000C + 100E + 10F + G < 4569 \cdot 9$$

$$36544 \leq 9600 + 10000C + 100E + 10F + G < 41121$$

Ta podwójna nierówność będzie spełniona tylko wówczas, gdy C=3. Możemy więc zapisać

$$36544 \leq 39600 + 100E + 10F + G < 41121$$

Tak, więc, przy założeniu, że D=8 mamy:

$$A = 5; B = 2; C = 3; D = 8$$

Pozostało ustalić, jakie cyfry ukrywają się pod E; F; G; H; I, wiedząc, że mogą to być cyfry:

0; 1; 4; 6; 7; 9.

G nie może być 0, bo wówczas także Hi I były by zerami, a tak być nie może

G nie może być 1, bo wówczas I też było by 1

Jeśli G=4, to I=6

G nie może być 6 bo wówczas I też było by 6

Jeśli G=7, to I= 9

Jeśli G=9, to I=1

Mamy więc 3 możliwości. Sprawdźmy je:

$$22884^2 = 523677456$$

Źle, bo występują w potędze dwie 7

$$22887^2 = 523814769$$

Mamy więc jedno rozwiązanie

$$22889^2 = 523906321$$

Źle, bo w potędze występują dwie 2.

II. Niech D=9

Zachodzić musi następująca podwójna nierówność:

$$4589 \cdot 9 \leq 10000C + 100E - 35100 + 10F + G < 4590 \cdot 10$$

$$41301 \leq 10000C + 100E - 35100 + 10F + G < 45900$$

$$76401 \leq 10000C + 100E + 10F + G < 81000$$

Ta nierówność będzie spełniona, gdy C=8.

Tak, więc, przy założeniu, że D=9 mamy:

$$A = 5; B = 2; C = 8; D = 9$$

Pozostało ustalić, jakie cyfry ukrywają się pod E; F; G; H; I, wiedząc, że mogą to być cyfry:

0; 1; 3; 4; 6; 7.

G nie może być 0, bo wówczas także H i I były by zerami, a tak być nie może

G nie może być 1, bo wówczas I też było by 1

G nie może być 3, bo wówczas I było by równe 9, ale 9 to przecież D

Jeśli G=4, to I=6

G nie może być 6 bo wówczas I też było by 6

G nie może być 7 bo wówczas I było by równe 9, ale 9 to przecież D

Pozostał więc tylko przypadek G=4

Sprawdźmy go:

$22994^2 = 528724036$

Potęga po prawej stronie nie spełnia warunku, że D=9

Odpowiedź:

Zadanie ma jedno rozwiązanie, w którym pod zapisem

$$\sqrt{ABCDEFGHI} = BBDDG$$

Ukrywa się równość

$$\sqrt{523814769} = 22887$$