Konkurs SM50: „GRECKIE POSZUKIWANIA"

Szukane cyfry: T = 2, O = 1, M = 7

$10^3 - 9^3 =$ **TMO** $= 271$

$9^3 - 8^3 =$ **TOM** $= 217$

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Oznaczmy: $A = x^3 - y^3 = 100\mathbf{T} + 10\mathbf{M} + \mathbf{O}$

$B = y^3 - z^3 = 100\mathbf{T} + 10\mathbf{O} + \mathbf{M}$

gdzie: $x > y > z \geq 1$ $^{(1)}$ to liczby naturalne

T € <1, 9>, **O, M** € <0, 9>

W rozwiązaniu pomijam warunek, że cyfry T, M i O to różne cyfry liczby trzycyfrowej

a) <u>Szacowanie wartości dla liczb x i y</u>

Spełnione są oczywiste warunki:

$100 \leq A \leq 999$ i $100 \leq B \leq 999$

ale $B = y^3 - z^3 \leq y^3 - 1$

skąd $y^3 - 1 \geq 100$

$y^3 \geq 101$

$y \geq 5$ $^{(2)}$

Analogicznie dla A mamy, korzystając z $^{(2)}$:

$A = x^3 - y^3 \leq x^3 - 5^3 = x^3 - 125$

skąd $x^3 - 125 \geq 100$

$x^3 \geq 225$

$x \geq 7$ $^{(3)}$

Z drugiej strony mamy warunek:

$A = x^3 - y^3 < 1000$

ale $x^3 - y^3 \geq x^3 - (x-1)^3 = x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 3x^2 - 3x + 1$

czyli $3x^2 - 3x < 1000 - 1 = 999$

$x(x-1) < 333$

co daje $x \leq 18$ $^{(4)}$

Z warunków $^{(3)}$ i $^{(4)}$ uzyskujemy oszacowanie: x € <7, 18> $^{(5)}$

Zaś z warunków $^{(1)}$, $^{(3)}$ i $^{(5)}$ uzyskujemy oszacowanie: y € <5, 17>

b) <u>Zawężenie zestawu dopuszczalnych par liczb {x, y}</u>

$A - B = (100\mathbf{T} + 10\mathbf{M} + \mathbf{O}) - (100\mathbf{T} + 10\mathbf{O} + \mathbf{M}) = 9\times(\mathbf{M} - \mathbf{O}) \leq 9 \times 9 = 81$

Z drugiej strony

$A - B = (x^3 - y^3) - (y^3 - z^3) = x^3 - 2y^3 + z^3 \geq x^3 - 2y^3 + 1$

czyli $x^3 - 2y^3 + 1 \leq 81$

Daje to pierwsze oszacowanie: $y \geq \sqrt[3]{\frac{x^3-80}{2}}$ $^{(6)}$

Mamy też wykorzystywany już warunek: $A = x^3 - y^3 \leq 999$

skąd otrzymujemy drugie oszacowanie: $y \geq \sqrt[3]{x^3 - 999}$ $^{(7)}$.

Łatwo sprawdzić, że dla $x \geq 13$ zachodzi nierówność: $(x^3 - 999) > (x^3 - 80)/2$

Czyli dla x € <7, 12> należy zastosować oszacowanie $^{(6)}$, a dla x € <13, 18> - oszacowanie $^{(7)}$.

Wykonując proste obliczenia (np. w arkuszu kalkulacyjnym) z wykorzystaniem jednego z powyższych dwóch oszacowań otrzymujemy następujący zestaw 18-stu par liczb {x, y}, wśród których należy szukać rozwiązania:

{7,6} {8,6} {8,7} {9,7} {9,8} {10,8} {10,9} {11,9} {11,10} {12,10} {12,11} {13,11} {13,12} {14,13} {15,14} {16,15} {17,16} {18,17}

Z powyższego wykazu wynika, że mamy $y \geq 6$.

c) Szacowanie wartości dla liczby z

Z warunku $y^3 - z^3 \geq 100$, dla $y = 6$ otrzymujemy kolejno:

$6^3 - z^3 \geq 100$

$216 - z^3 \geq 100$

$z^3 \leq 116$

$z \leq 4$

czyli dopuszczalne pary {y, z} dla y = 6 to: {6,1} {6,2} {6,3} i {6,4} [(8)].

Dla $y \geq 7$ warunek $y^3 - z^3 \geq 100$ jest spełniony dla każdego z € <1, y - 1>.

Z drugiej nierówności: $y^3 - z^3 \leq 999$ otrzymujemy, analogicznie do ograniczenia [(7)], oszacowanie

$$z \geq \sqrt[3]{y^3 - 999}$$

Dla $y \geq 11$ generuje to zawężenie możliwych par {y, z} do następujących:

{11,7} {11,8} {11,9} {11,10} {12,9} {12,10} {12,11} {13,11} {13,12} [(9)]
{14,13} {15,14} {16,15} {17,16}

Dla $7 \leq y \leq 10$ liczba z może przyjmować wszystkie wartości z przedziału <1, y – 1>.

Jak widać dla $x \geq 15$ możliwa jest tylko jedna kombinacja par {x, y} i {y, z}, ale w każdym z tych przypadków mamy, niezgodnie z warunkiem z początku punktu (b), poniższe nierówności:

$(18^3 - 17^3) - (17^3 - 16^3) > 81$

$(17^3 - 16^3) - (16^3 - 15^3) > 81$

$(16^3 - 15^3) - (15^3 - 14^3) > 81$

$(15^3 - 14^3) - (14^3 - 13^3) > 81$

Eliminuje to możliwość istnienia rozwiązania dla $x \geq 15$

Pozostaje nam możliwych 14 par {x, y} oraz (po uwzględnieniu ograniczeń [(8)] i [(9)]) 43 pary {y, z}.

d) Szukanie rozwiązania z wykorzystaniem arkusza kalkulacyjnego

Zestawienie wartości $x^3 - y^3$ dla 14-stu możliwych par {x, y} z wartościami $y^3 - z^3$ dla wszystkich 43 par {y, z} pozwala praktycznie natychmiast wskazać jedyne rozwiązanie: pary {10, 9} i {9, 8}.

Uwaga:

Przyjęcie na starcie założenia, że cyfry T, O i M muszą być różne niewiele zmienia w przyjętej metodzie rozwiązania. Pozwala to tylko wyeliminować 3 pary {x, y}: {10, 8}, {11, 10} i {13, 11} z dalszej analizy, a także 7 innych par {y, z}.